

林

岳

數列與級數

數
學

MATHEMATICS

YES

《數列與級數》

目 錄

第 1 節 數列 1

第 2 節 等差級數 23

重點1 數列、等差數列

一、數列：

1. 定義：將一些數排成一列，即為數列。
2. 項：數列中的每一個數叫做項；第一個數叫做首項，記作 a_1 ，第二個數叫做第二項，記作 a_2 ，第三個數叫做第三項，記作 a_3 ，……，最後一個數叫做末項，記作 a_n 。

註：國中只討論有限數列。

二、等差數列：

1. 定義：在一數列中，任何相鄰兩項，後項減去前項所得的差都相等，此數列叫做**等差數列**或**算術數列**。
2. 公差：後項減去前項所得的差都相等，稱為**公差**，通常以 d 表示。
3. 當數列由小到大 \Rightarrow 公差為正數。
4. 當數列由大到小 \Rightarrow 公差為負數。
5. 當數列每一項都相同時 \Rightarrow 公差為 0。

範例1

下列為等差數列，填入適當答案：

(1) 3, 5, 7, _____, _____, _____
公差：_____。

(2) $a, a+2, a+4, ______, ______$
公差：_____。

(3) _____, 4, 7, _____
公差：_____。

(4) _____, _____, -2, -6
公差：_____。

(5) _____, _____, -2, -2
公差：_____。

練習1

下列為等差數列，填入適當答案：

(1) 8, 5, _____, _____, _____
公差：_____。

(2) $x, x-3, ______, ______, x-12$
公差：_____。

(3) _____, 3, -1, _____
公差：_____。

(4) 7, _____, -3, -8
公差：_____。

(5) _____, _____, 1, 1
公差：_____。

重點2 等差數列公式

設等差級數的首項是 a_1 ，公差是 d ，第 n 項是 a_n ，第 k 項是 a_k ，則：

首項 a_1	第二項 a_2	第三項 a_3	第四項 a_4	……	第 n 項 a_n
a_1	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$	$a_1 + 3d$	……	$a_1 + (n-1)d$

1. 公式： $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。
◆若知道首項、公差、項數、第 n 項，其中任意三個，可代入公式找出剩下未知的答案。
2. 公式： $a_n = a_k + (n-k)d$ 。
◆若知道第 k 項、公差、項數、第 n 項，其中任意三個，可代入公式找出剩下未知的答案。
3. 公差公式： $d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$ 。 ($n \neq k$)

範例2 【 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 】

(1) 若一等差數列的首項為 5，且公差為 -3，求此等差數列的第 10 項及第 101 項。

(2) 若一等差數列的第 7 項為 15，且公差為 -2，求此等差數列的首項。

(3) 若一等差數列的第 9 項為 15，且首項為 55，求此等差數列的公差。

練習2

(1) 若一等差數列的首項為 -100，且公差為 2，求此等差數列的第 50 項及第 100 項。

(2) 若一等差數列的公差為 $\frac{3}{4}$ ，第 13 項為 15，求此等差數列的首項。

(3) 若一等差數列的首項為 20，第 15 項為 90，求此等差數列的公差。

範例 3 【 $a_n = a_k + (n-k)d$ 】

若一等差數列的第 8 項為 10，且公差為 3，求此等差數列的第 16 項。

練習 3

若一等差數列的第 5 項為 -21，且公差為 2，求此等差數列的第 19 項。

範例 4 【 $d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$ 】

若一等差數列的第 3 項為 -7，第 12 項為 47，試求此等差數列的：

(1) 公差；(2) 首項；(3) 第 25 項。

練習 4

若一等差數列的第 7 項為 -13，第 15 項為 -37，試求此等差數列的：

(1) 公差；(2) 首項；(3) 第 33 項。

範例 5 【求第 n 項大於或小於 0】

若一等差數列的第 5 項為 -12，第 13 項為 12，試求：

- (1) 此數列的公差。
- (2) 此數列從第幾項開始出現正數？

練習 5

若一等差數列的第 3 項為 17，第 23 項為 -23，試求：

- (1) 此數列的公差。
- (2) 此數列從第幾項開始出現負數？

範例 6 【平面坐標與等差數列】

在坐標平面上，由點 $A_1(-47, 35)$ 向右移動 3 個單位長，再向下移動 2 個單位長，到達點 A_2 。繼續由點 A_2 同樣向右移動 3 個單位長，再向下移動 2 個單位長，到達點 A_3 。如此繼續移動，依次可到達點 A_4 、 A_5 、 A_6 、……，求：

- (1) 點 A_2 的坐標。
- (2) 第一個到達第四象限的點的坐標。

練習 6

在坐標平面上，由點 $A_1(-38, -49)$ 向右移動 2 個單位長，再向上移動 3 個單位長，到達點 A_2 。繼續由點 A_2 同樣向右移動 2 個單位長，再向上移動 3 個單位長，到達點 A_3 。如此繼續移動，依次可到達點 A_4 、 A_5 、 A_6 、……，求：

- (1) 點 A_2 的坐標。
- (2) 第一個到達第一象限的點的坐標。

範例 7 【座位與等差數列】

阿明與阿寶買了兩張第五車廂對號入座的火車票，如附圖，車票座位依序是 45 號、47 號。

- (1) 寫出等差數列：1, 5, 9, ... 的第 n 項。
- (2) 寫出等差數列：3, 7, 11, ... 的第 n 項。
- (3) 哪一位的座位靠近窗戶？他們分別坐在第幾列？

	第一排	第三排	第四排	第二排
第一列	1	3	4	2
第二列	5	7	8	6
窗戶	9	11	12	10
	⋮	⋮	⋮	⋮

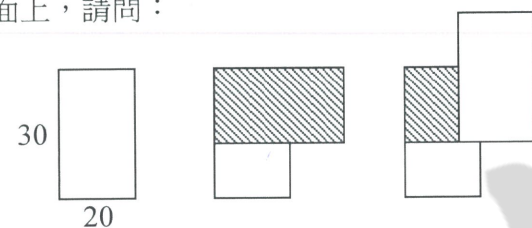
練習 7

小美搭乘火車由臺北至墾丁渡假，已知小美的座位位於列車由左至右的第 2 排第 10 列，請問小美的座位是幾號？

	1	3	走	4	2	
	5	7		8	6	
窗戶	9	11	走	12	10	窗戶
	13	15	道	16	14	
	⋮	⋮		⋮	⋮	

範例 8 【數形關係】

長 30、寬 20 的長方形紙張，依圖示方式疊在桌面上，請問：



- (1) 疊 2 張時，所覆蓋面積為何？
- (2) 疊 3 張時，所覆蓋面積為何？
- (3) 疊 4 張時，所覆蓋面積為何？
- (4) 依此類推，疊 n 張時，所覆蓋面積為何？

練習 8

用棉花棒排成正方形，排法如圖：



- (1) 分別算出排成 1, 2, 3, 4, 5 個正方形所需的棉花棒。
- (2) 需要幾根棉花棒才能排成 35 個正方形？
- (3) 若有 64 根棉花棒，則可排成幾個正方形？

重點 3 等差中項

1. 定義：如果 a 、 b 、 c 三數成等差數列，則中間的一項 b 叫做 a 與 c 的等差中項，也可稱為 a 與 c 的算數中項或算術平均數。

2. (1) 設 a 、 b 、 c 三數成等差數列 $\Leftrightarrow b-a=c-b$ ，所以
$$\begin{cases} 2b = a+c \\ b = \frac{a+c}{2} \end{cases}$$

(2) 設 $\frac{1}{a}$ 、 $\frac{1}{b}$ 、 $\frac{1}{c}$ 三數成等差數列，則 $b = \frac{2ac}{a+c}$ 。

(3) 設四數 a 、 b 、 c 、 d 成等差數列，則 $a+d=b+c$ 。

(4) 設五數 a 、 b 、 c 、 d 、 e 成等差數列，則 $a+e=b+d=2c$ 。

◆簡記：等差中項 = (前項 + 後項) \div 2。

範例 9 【等差中項 $b = \frac{a+c}{2}$ 】

(1) 若 a 與 19 的等差中項為 9，求 a 之值。

(2) 若 $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{6}$ 成等差數列，求 $x = ?$

練習 9

(1) 若 25 和 b 的等差中項為 -2，求 $b = ?$

(2) 若 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{a}$ 成等差數列，求 $a = ?$

範例 10

若 a 、 3 、 a^2 為一等差數列，求所有滿足此條件的等差數列。

練習 10

若二數 x 、 y 的等差中項為 4 ，且 $2x - y$ 、 9 、 $x + 2y$ 為等差數列，求 x 、 y 之值。

範例 11 【利用等差中項原理】

如果兩數的等差中項為 7 ，且這兩數的積為 24 ，求這兩數為何？

練習 11

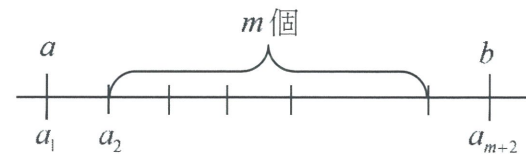
如果兩數的等差中項為 11 ，且這兩數的積為 96 ，求這兩數。

重點 4 等差中間項

定義：在 a 與 b 兩數之間插入 m 個數，使其與 a 、 b 成一等差數列，則插入的 m 個數都叫做 a 與 b 的等差中間項。(如右圖)

(1) a 是首項， b 是第 $(m+2)$ 項。

(2) 公式： $b = a_{m+2} = a + (m+1)d$ 。



範例 12 【插入 n 個數，全部有 $n+2$ 個】

若在 -19 和 74 之間插入 30 個數，使其成為等差數列，試求：

(1) 所形成等差數列的公差。

(2) 插入的第 15 個數。

練習 12

若在 -34 和 b 之間插入 20 個數，使其成為等差數列，已知插入的第 10 個數為 16 ，試求：

(1) 所形成等差數列的公差。

(2) $b = ?$